**Übung V** zum Repetitorium zu MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK
Krummlinige Koordinaten, mehrdimensionale Integration WiSe 2022/23
10.03.2023

## KRUMMLINIGE KOORDINATEN, MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

**[R19]** *Parabolische Koordinaten*

Wir betrachten sogenannte *parabolische Koordinaten* $\sigma, \tau$ in zwei Dimensionen. Die kartesischen Koordinaten ausgedrückt durch die parabolischen Koortinaten sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Einheitsvektoren $\vec{e}_\sigma$ und $\vec{e}_\tau$ in $\sigma$- bzw. $\tau$-Richtung.

*Erinnerung: Es ist* $\vec{e}_\sigma = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma}$ *und analog für* $\tau$.

(b) Berechne die Jacobi-Matrix $J = J_{(\sigma,\tau)}\vec{r}$ und die Jacobi-Determinante $\det J$.

**[R20]** *Salzstreuer*

Ein Salzstreuer sei rotationssymmetrisch um seine vertikale Achse, habe Höhe $H$ und der horizontale Abstand seines Randes zur Symmetrieachse sei für $z \in [0, H]$ gegeben durch

$$\rho(z) = A\left(1 - e^{(z-H)/B}\right).$$

Wie groß ist sein Volumen?

*Tipp:* Welche Koordinaten bieten sich an? Wie sieht das zu berechnende Integral in diesen Koordinaten aus?

**[R21]** *Atmosphäre*

In einem sehr vereinfachten Modell hat die Erdatmosphäre eine von der Höhe über Normalnull abhängige Dichte $\varrho(h) = \varrho_0\, e^{-h/h_s}$. Berechne ohne Zahlwerte die Gesamtmasse der Atmosphäre, wobei $h = r - R_{\text{Erde}}$ ist. Der Einfachheit halber integriere von $r = R_{\text{Erde}}$ bis $r = \infty$.

**[R22]** *Weihnachtsbaum*

Der große Weihnachtsbaum vor der Marktkirche sei als Kegel der Höhe $H$ und Radius $R$ seiner Grundfläche idealisiert. Die Massenverteilung innerhalb dieses Kegels sei durch die Dichte

$$\varrho(\vec{r}) = \varrho_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

gegeben, wobei die Grundfläche des Baumes am Boden bei $z = 0$ liege.

(a) Berechne die Masse $M$ des Weihnachtsbaumes.

(b) Berechne seinen Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M}\int d^3r\; \vec{r}\; \varrho(\vec{r})$.

(c) Der Weihnachtsbaum soll als besondere Attraktion nächstes Jahr rotieren. Berechne dafür das Trägheitsmoment für eine Drehung um die $z$-Achse.